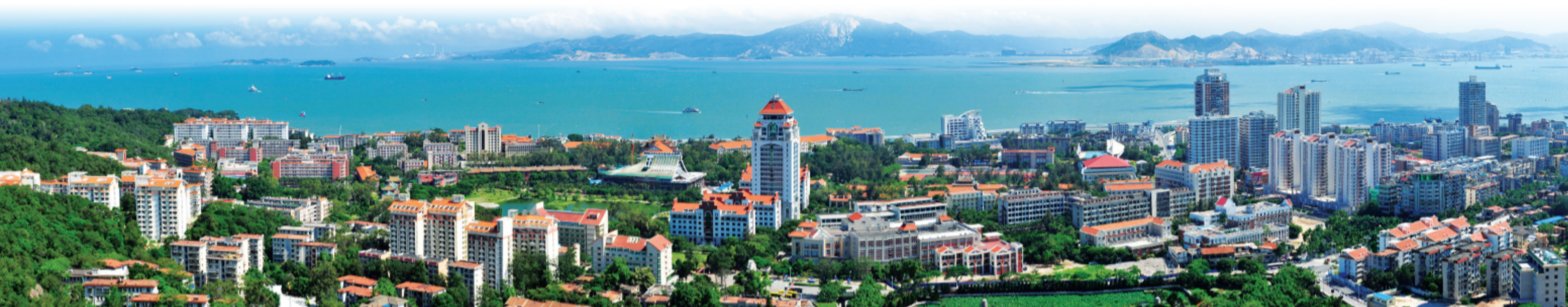
厦门大学信息学院 本科选修课
2021-2022 第二学期

模 式 识 别
Pattern Recognition

主 讲: 王 程



1.2 特征矢量和特征空间

- n维特征矢量

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$$

- n维特征空间：$\vec{x}$ 的全体构成的n维空间

  记为 X^n 或 R^n 或 Ω

- 特征矢量是**随机矢量**

1.3 随机矢量的描述

（一）随机矢量的分布函数

（二）随机矢量的数字特征

（三）随机变量、随机矢量间的统计关系

（四）随机矢量的变换

1.3 随机矢量的描述

（一）随机矢量的分布函数

设 $\vec{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)'$ 为随机矢量

$\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)'$ 为确定性矢量

- **随机矢量的联合概率分布函数**

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n)$$

写为矢量形式 $F(\vec{x})=P(\vec{X}\le\vec{x})$

- **随机矢量的联合概率密度函数**

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)\overset{\Delta}{=}p(\vec{x})=\partial^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n)/\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n$$

- **类概率分布和类概率密度函数**

$$F(\vec{x}\,|\,\omega_i)=P(\vec{X}\le\vec{x}\,|\,\omega_i)$$

$$p(\vec{x}\,|\,\omega_i)=\partial^n F(x_1,x_2,\cdots,x_n\,|\,\omega_i)/\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n$$

（二）随机矢量的数字特征

（1）均值矢量（期望矢量）

n维随机矢量 $\vec{X}$ 的数学期望 $\vec{\mu}$ 定义为

$$\vec{\mu} = E[\vec{X}] \stackrel{\Delta}{=} \bar{\vec{X}} = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{pmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \int_{X^n} \vec{x} p(\vec{x}) d\vec{x}$$

其中，$\vec{\mu}$ 的分量

$$\mu_i = E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_i) dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \stackrel{\Delta}{=} \bar{X}_i$$

（二）随机矢量的数字特征

（2）条件期望

$$\vec{\mu}_{\omega_i} = E[\vec{X}|\omega_i] = \int_{\vec{x}\in\omega_i} \vec{x}p(\vec{x}|\omega_i)d\vec{x}$$

（3）协方差矩阵

$$\Sigma = E[(\vec{X}-\bar{\vec{X}})(\vec{X}-\bar{\vec{X}})'] = \int_{X^n} (\vec{x}-\vec{\mu})(\vec{x}-\vec{\mu})' p(\vec{x})d\vec{x} \overset{\Delta}{=} \left(\sigma_{ij}^2\right)_{n\times n}$$

其中，σ_{ij}^2是随机矢量$\vec{X}$ 的第i个分量与第j个分量的协方差。

$$\sigma_{ij}^2 = E[(X_i-\bar{X}_i)(X_j-\bar{X}_j)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)p(x_i,x_j)dx_i dx_j$$

当i=j时，σ_{ii}^2便是X_i的方差。

（二）随机矢量的数字特征

（4）自相关矩阵

$$R = E[\vec{X}\vec{X}']$$

$$\Sigma = R - \bar{\vec{X}}\ \bar{\vec{X}}' = R - \vec{\mu}\vec{\mu}'$$

（5）相关系数

$$r_{ij} = \sigma_{ij}^2 / (\sigma_{ii}\ \sigma_{jj})$$

由柯西-许瓦兹不等式: $(E[VW])^2 \le E[V^2]E[W^2]$

可得 $|\sigma_{ij}^2| \le \sigma_{ii}\sigma_{jj}$

$$-1 \le r_{ij} \le 1$$

相关系数矩阵定义为 $\mathbf{r} = [r_{ij}]_{n\times n}$

（二）随机矢量的数字特征

(6) 协方差矩阵的非负定性

定义：设*A*为对称矩阵，对任意矢量 $\vec{x}$，$\vec{x}'A\vec{x}$是*A*的二次型。

若对任意矢量$\vec{x}$ 恒有$\vec{x}'A\vec{x} \geq 0$

则称*A*是非负定矩阵。

若对任意的$\vec{x} \neq 0$恒有$\vec{x}'A\vec{x} > 0$

则称*A*是正定矩阵。

对于正定矩阵，其各阶主子式非零（包括| *A* |≠0）。

- 协方差矩阵是非负定的。即

$$\forall \vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{x}'\Sigma\vec{x} \geq 0$$

（三）随机变量、随机矢量间的统计关系

(1) 不相关

随机矢量 $\vec{X}$ 的第i个分量 X_i和第j个分量X_j，若有

$$\sigma_{ij}^2 = E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)] = 0, \quad (i \neq j)$$

则称它们不相关。这等价于

$$E(X_i X_j) = E[X_i]E[X_j]$$

随机矢量$\vec{X}$ 和 $\vec{Y}$不相关的充要条件是互协方差矩阵

$$\mathrm{cov}(\vec{X}, \vec{Y}) = \phi$$

亦即

$$E(\vec{X}\vec{Y}') = E[\vec{X}]E[\vec{Y}']$$

（三）随机变量、随机矢量间的统计关系

（2）正交

随机矢量 $\vec{X}$ 和 $\vec{Y}$ 若满足

$$E[\vec{X}'\vec{Y}] = 0$$

则称 $\vec{X}$ 和 $\vec{Y}$ 正交。

(3) 独立

若随机矢量 $\vec{X}$ 和 $\vec{Y}$ 的联合概率密度函数满足

$$p(\vec{x}, \vec{y}) = p(\vec{x})p(\vec{y})$$

则称 $\vec{X}$ 和 $\vec{Y}$ 独立。

不相关 正交 独立的关系

(1) 不相关

$$E(\vec{X}\vec{Y}') = E[\vec{X}]E[\vec{Y}']$$

(2) 正交

$$E[\vec{X}'\vec{Y}] = 0$$

(3) 独立

$$p(\vec{x},\vec{y}) = p(\vec{x})p(\vec{y})$$

(1) 不相关和独立的关系

- 独立必不相关，反之不然
- 两个变量或矢量服从正态分布时不相关和独立等价

(2) 不相关和正交的关系

- 当有一个变量或矢量的期望为零，不相关和正交等价
- 否则没关系

（四）随机矢量的变换

$$\vec{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\g_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\\vdots\\g_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}g_1(\vec{X})\\g_2(\vec{X})\\\vdots\\g_n(\vec{X})\end{pmatrix}\triangleq\vec{g}(\vec{X})$$

若它们的函数关系是一一对应的，则有

$$p(\vec{y})=\frac{p(\vec{x})}{|J|}$$

式中，雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}&\frac{\partial g_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\\frac{\partial g_2}{\partial x_1}&\frac{\partial g_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\partial g_n}{\partial x_1}&\frac{\partial g_n}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

随机矢量的线性变换

$$\vec{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}X_1+a_{12}X_2\cdots+a_{1n}X_n\\a_{21}X_1+a_{22}X_2\cdots+a_{2n}X_n\\\vdots\\a_{n1}X_1+a_{n2}X_2\cdots+a_{nn}X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\\\vdots\\a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}=A\vec{X}$$

此时，雅可比行列式：$J=\left|A\right|$

$\vec{Y}$的概率密度函数：$p(\vec{y})=p(\vec{x})/\left\|A\right\|$

$\vec{Y}$的均值矢量：$\vec{\mu}_y=E[\vec{Y}]=AE[\vec{X}]=A\vec{\mu}_x$

$\vec{Y}$的协方差矩阵：$\Sigma_y=E[(\vec{Y}-\vec{\mu}_y)(\vec{Y}-\vec{\mu}_y)']$

$$=AE[(\vec{X}-\vec{\mu}_x)(\vec{X}-\vec{\mu}_x)']A'=A\Sigma_x A'$$

1.4 正态分布(或高斯分布)

- 正态分布有极其广泛的实际背景, 例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等 ,正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度, 炮弹的弹落点的分布等, 都服从或近似服从正态分布.
- 另一方面,有些分布(如二项分布、泊松分布)的极限分布是正态分布.
- 所以,无论在实践中,还是在理论上,正态分布是概率论中最重要的一种分布.

1.4 正态分布（或高斯分布）

（一）正态分布的定义

（1）一维随机变量的正态分布

一维随机变量X服从正态分布，记为$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，其概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

式中，μ为X的数学期望， σ^2为方差。

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$$

$$\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2p(x)dx$$

(2) 随机矢量正态分布

正态分布随机矢量$\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})'\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})]$$

式中，$\vec{\mu}$ 为 $\vec{X}$ 的期望矢量， Σ为 $\vec{X}$的协方差矩阵

$$\vec{\mu}=E[\vec{X}]=(E[X_1],E[X_2],\cdots,E[X_n])'$$

$$\Sigma=E[(\vec{X}-\vec{\mu})(\vec{X}-\vec{\mu})']=\begin{pmatrix}\sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2\\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2\end{pmatrix}$$

(二)正态分布随机矢量的性质

- 分布函数完全由$\vec{\mu}$ 和Σ确定
- 等概率密度点的轨迹为一超椭球面
- 对正态分布，不相关等价于独立
- 其边缘密度和条件密度仍然是正态分布
- 正态分布随机矢量的线性变换仍为正态随机矢量
- 其分量的线性组合是一正态随机变量

高斯资料

Carl Friedrich Gauss

高斯.卡尔·弗雷德里希：(1777-1855) 德国数学家和天文学家，因其对代数、微积分几何、或然率理论和数字理论的贡献而为人称道.

习题

1. 试证明，多元正态随机矢量的线性变换仍为多元正态随机矢量。

2. 试证明，对于正态分布，不相关与独立是等价的。

3. 试证明，多元正态随机矢量X的分量的线性组合是一正态随机变量。

以下为补充内容

矩阵微分法基本知识

一、矢量或矩阵对于数量变量的微分

1. 定义

（1）矢量对于数量变量的微分

设有n维矢量函数 $\vec{a}(t)=[a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t)]'$

则其对于t的导数为

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt}=[\frac{da_1(t)}{dt},\frac{da_2(t)}{dt},\cdots,\frac{da_n(t)}{dt}]'$$

矩阵微分法基本知识

（2）矩阵对于数量变量的微分

对于n×m矩阵函数 $A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nm}(t) \end{pmatrix}$

定义它对t的导数为 $\dfrac{dA(t)}{dt}=\begin{pmatrix} \dfrac{da_{11}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{da_{1m}(t)}{dt} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{da_{n1}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{da_{nm}(t)}{dt} \end{pmatrix}$

一、矢量或矩阵对于数量变量的微分

2. 运算公式

（1）加法 $$\frac{d}{dt}[A(t)\pm B(t)]=\frac{dA(t)}{dt}\pm\frac{dB(t)}{dt}$$

（2）数乘 $$\frac{d}{dt}[\lambda A(t)]=\frac{d\lambda}{dt}A(t)+\lambda\frac{dA(t)}{dt}$$

（3）乘法 $$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$$

例: $$\frac{d}{dt}(\vec{x}'A\vec{x})=\frac{d\vec{x}'}{dt}A\vec{x}+\vec{x}'\frac{dA\vec{x}}{dt}$$ (其中A为常数矩阵)

$$=\frac{d\vec{x}'}{dt}A\vec{x}+\vec{x}'(\frac{dA}{dt}\vec{x}+A\frac{d\vec{x}}{dt})=\dot{\vec{x}}'A\vec{x}+\vec{x}'A\dot{\vec{x}}$$

$$=2\vec{x}'A\dot{\vec{x}}=2\dot{\vec{x}}'A\vec{x}$$

一、矢量或矩阵对于数量变量的微分

2. 运算公式

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}'A\vec{x}) = 2\vec{x}'A\dot{\vec{x}} = 2\dot{\vec{x}}'A\vec{x}$$

当A=I时，有 $$\frac{d\|\vec{x}\|^2}{dt} = 2\vec{x}'\dot{\vec{x}} = 2\dot{\vec{x}}'\vec{x}$$

上式的数量形式为

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + \cdots + x_n\dot{x}_n)$$

逆矩阵求导公式： $$\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{d(A)}{dt}A^{-1}$$

二、数量函数对于矢量的微分

1. 定义

设 $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ，$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$

则数量函数 $f(\vec{x})$对矢量 $\vec{x}$ 的导数为

$$\frac{df(\vec{x})}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \stackrel{\Delta}{=} grad\, f = \nabla f$$

上述导数习惯上叫做函数 f 的梯度。

二、数量函数对于矢量的微分

2. 运算公式 设f和g都是矢量$\vec{x}$ 的数量函数

（1）加法 $$\frac{d}{d\vec{x}}[f \pm g] = \frac{df}{d\vec{x}} \pm \frac{dg}{d\vec{x}}$$

（2）乘法 $$\frac{d}{d\vec{x}}[fg] = \frac{df}{d\vec{x}} g + f \frac{dg}{d\vec{x}}$$

例：设 $f(\vec{x}) = \vec{x}'\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

则 $$\frac{df}{d\vec{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)' = (2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n)' = 2\vec{x}$$

即 $$\frac{d(\vec{x}'\vec{x})}{d\vec{x}} = \frac{d\,\|\vec{x}\|^2}{d\vec{x}} = 2\vec{x}$$

三、矢量函数对于矢量的微分

1. 定义

设函数 $\vec{a}(\vec{x})=\begin{pmatrix} a_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ a_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$ $,\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$

是n维矢量 $\vec{x}$ 的m维矢量函数，定义

$$\frac{d\vec{a}'(\vec{x})}{d\vec{x}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_m(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_1(\vec{x})}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial a_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n\times m} \quad \frac{d\vec{a}(\vec{x})}{d\vec{x}'}=\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\frac{d\vec{a}'(\vec{x})}{d\vec{x}}=\left(\frac{d\vec{a}(\vec{x})}{d\vec{x}'}\right)'$$

定义为 $\vec{a}(\vec{x})$ 的雅可比（Jacobi）矩阵

三、矢量函数对于矢量的微分

2. 运算公式

设 $\vec{a}(\vec{x}),\vec{b}(\vec{x})$ 是n维矢量$\vec{x}$的m维矢量函数，
$\lambda(\vec{x})$ 是数量函数

（1）加法 $$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{a}'\pm\vec{b}')=\frac{d\vec{a}'}{d\vec{x}}\pm\frac{d\vec{b}'}{d\vec{x}}$$

注意：等式两端都是n×m矩阵

（2）数乘 $$\frac{d}{d\vec{x}}(\lambda\vec{a}')=\frac{d\lambda}{d\vec{x}}\vec{a}'+\lambda\frac{d\vec{a}'}{d\vec{x}}$$

（3）乘法 $$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{a}'\vec{b})=\frac{d\vec{a}'}{d\vec{x}}\vec{b}+\frac{d\vec{b}'}{d\vec{x}}\vec{a}$$

注意：等式两端都是n×1矢量

三、矢量函数对于矢量的微分

证明乘法公式： $\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{a}'\vec{b})=\frac{d\vec{a}'}{d\vec{x}}\vec{b}+\frac{d\vec{b}'}{d\vec{x}}\vec{a}$

设 $\vec{a}(\vec{x})=[a_1(\vec{x}),a_2(\vec{x}),\cdots,a_m(\vec{x})]'$, $\vec{b}(\vec{x})=[b_1(\vec{x}),b_2(\vec{x}),\cdots,b_m(\vec{x})]$

$$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{a}'\vec{b})=\frac{d}{d\vec{x}}(a_1b_1+\cdots+a_mb_m)=[\frac{d}{d\vec{x}}(a_1b_1)+\cdots+\frac{d}{d\vec{x}}(a_mb_m)]$$

$$=[(\frac{da_1}{d\vec{x}}b_1+a_1\frac{db_1}{d\vec{x}})+\cdots+(\frac{da_m}{d\vec{x}}b_m+a_m\frac{db_m}{d\vec{x}})]$$

$$=[(\frac{da_1}{d\vec{x}}b_1+\cdots+\frac{da_m}{d\vec{x}}b_m)+(a_1\frac{db_1}{d\vec{x}}+\cdots+a_m\frac{db_m}{d\vec{x}})]$$

$$=\begin{pmatrix} da_1/dx_1 & \cdots & da_m/dx_1 \\ \vdots & & \vdots \\ da_1/dx_n & \cdots & da_m/dx_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} db_1/dx_1 & \cdots & db_m/dx_1 \\ \vdots & & \vdots \\ db_1/dx_n & \cdots & db_m/dx_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$=\frac{d\vec{a}'}{d\vec{x}}\vec{b}+\frac{d\vec{b}'}{d\vec{x}}\vec{a}$$

三、矢量函数对于矢量的微分

2. 运算公式

（4） $$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}'A) = A$$

（5） $$\frac{d}{d\vec{x}'}(A\vec{x}) = A$$

（6） $$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}'A\vec{x}) = (A + A')\vec{x} \quad , \frac{d}{d\vec{x}'}(\vec{x}'A\vec{x}) = \vec{x}'(A' + A)$$

（7）当A是对称阵时 $$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}'A\vec{x}) = 2A\vec{x}, \quad \frac{d}{d\vec{x}'}(\vec{x}'A\vec{x}) = 2\vec{x}'A$$

作业：证明上述公式

三、矢量函数对于矢量的微分

求证： $\dfrac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}\,'A) = A$

证：

设 $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m]_{n\times m}$

$$\vec{x}\,'A = [\vec{x}\,'\vec{a}_1, \vec{x}\,'\vec{a}_2, \cdots, \vec{x}\,'\vec{a}_m]$$

$$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}\,'A) = [\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}\,'\vec{a}_1), \frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}\,'\vec{a}_1), \cdots, \frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}\,'\vec{a}_m)]$$

$$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}\,'\vec{a}_i) = \frac{d\vec{x}\,'}{d\vec{x}}\vec{a}_i + \frac{d\vec{a}_i\,'}{d\vec{x}}\vec{x} = \vec{a}_i$$

$$\frac{d}{d\vec{x}}(\vec{x}\,'A) = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m] = A$$

四、矩阵微分法习题

1. 证明 $\dfrac{d\vec{x}}{d\vec{x}'}=I,\dfrac{d\vec{x}'}{d\vec{x}}=I$ ，并求 $\dfrac{d\vec{x}}{d\vec{x}}=?$

2. 证明 $\dfrac{d}{d\vec{x}}(\vec{a}'\vec{b})=\dfrac{d\vec{a}'}{d\vec{x}}\vec{b}+\dfrac{d\vec{b}'}{d\vec{x}}\vec{a}$

3. 设函数 $f(\vec{x})=x_1^2+3x_1x_3+2x_1x_2+2x_2^2+x_2x_3+6x_3^2$

   试将其写成 $f(\vec{x})=\vec{x}'A\vec{x}$ 的形式，并求 $df(\vec{x})/d\vec{x}=?$

4. 求 $\dfrac{d}{d\vec{x}'}(A\vec{x})=?$

5. 求 $\dfrac{d}{d\vec{x}'}(\vec{x}'A\vec{x})=?$

End